確率数理工学9

⑪ 大数の法則と中心極限定理

- 大数の法則

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[\text{a.s.（強）}]{p\text{（弱）}} \mu$$

（標本平均）　　　（真の平均）

- 中心極限定理

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \rightsquigarrow \text{正規分布}$$

(注) それぞれどういう意味で「収束」しているかを明確に理解すること。
何となく「正規分布に収束する」という理解で止めない。

Thm（大数の弱法則）(☆)

$X_i\ (i=1,2,\ldots)$：互いに独立

$E[X_i]=\mu_i,\quad Var[X_i]=\sigma_i^2$ で、

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n^2} \longrightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{n} \longrightarrow \mu \quad \text{なら}$$

↑ n^2 で割っている

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

である。

特に、X_i が i.i.d. で $E[X_i]=\mu$（有限），$Var[X_i]<\infty$ なら

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

である。

※ 確率収束を主張するのが「弱」法則。

証明

$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ とすると、仮定より $\bar{\mu}_n \to \mu$ である。

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geqq \varepsilon) \leqq P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \cup |\bar{\mu}_n - \mu| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\leqq \underbrace{P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{①} + \underbrace{P\left(|\bar{\mu}_n - \mu| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{②}$$

- $\bar{\mu}_n \to \mu$ より ② $\to 0$
- 一方、 $P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{\text{Markov}}{\leqq} \dfrac{E[(\bar{X}_n - \bar{\mu}_n)^2]}{\frac{\varepsilon^2}{4}} \leqq \dfrac{E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right)^2\right]}{\frac{\varepsilon^2}{4}}$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu_i)^2]}{\frac{\varepsilon^2}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{\frac{\varepsilon^2}{4}} \longrightarrow 0 \quad (\because \text{仮定})$$

つまり、$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ である。 //

確率収束は概収束に変えられる：大数の強法則

事象の列 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\dots)$ があったとして、その上極限を

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

とする。 $\omega \in \limsup A_n$ なら、任意の k に対し、ある $n \geq k$ が存在して、
$\omega \in A_n$ である。つまり、ω は無限個の A_n に含まれる。(逆も然り)
このことから

$$\limsup A_n = A_n \text{ i.o.}$$

とも書く。(i.o. = infinitely often)

Thm (Borel - Cantelli の補題)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

2. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ は独立で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

//

(証明) 1. 任意の N に対し、

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \quad (劣加法性)$$

である。今 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ より、$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0$ である。

よって、$N \to \infty$ とすることで、

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0$$

を得る。

2.

↳ 次ページへ

まず.

$$P\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)^c\right)$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right)$$

であるので. $P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \quad (\forall k=1,2,\ldots)$ を示せば良い.

今 任意の N に対し.

$(A_n)_n$ は独立

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leqq P\left(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\right) = \prod_{n=k}^{N} P(A_n^c)$$

$$= \prod_{n=k}^{N}(1-P(A_n)) \leqq \prod_{n=k}^{N} e^{-P(A_n)}$$

$$= e^{-\sum_{n=k}^{N} P(A_n)}$$

である. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ より. $\forall k$ で $\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = \infty$ でもある. よって.

$N \to \infty$ とすることで. 右辺 $\to 0$ である. よって示された. //

Thm（大数の強法則）

X_i $(i=1,2,\dots)$: 独立

$E[X_i]=\mu$: 有限

$Var[X_i]=\sigma^2<\infty$, $\quad \nu_4=E[|X_i-\mu|^4]<\infty$

ならば

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

概収束！

//

（証明）$^\forall\varepsilon>0$ に対し

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon\right)=0$$

を示す。これが示せれば、確率の連続性より

$$\begin{aligned}P\left(^\exists\lim_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|=0\right) &= 1-P\left(^\exists\varepsilon>0,\ \limsup_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon\right)\\ &= 1-P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\limsup_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|\geq\frac{1}{m}\right\}\right)\\ &= 1-\lim_{m\to\infty}P\left(\limsup_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|\geq\frac{1}{m}\right)\\ &= 1-0=1\end{aligned}$$

が示せる。

$A_n:=\{|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon\}$ として、$(A_n)_{n=1}^{\infty}$ に Borel-Cantelli を適用する。

$$\begin{aligned}P(A_n) &= P(|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)\\ &\leq \frac{E[|\overline{X}_n-\mu|^4]}{\varepsilon^4}\end{aligned}$$

Markovの不等式

であるが、

（1次, 3次のcross-termは0）

$$E[|\overline{X}_n-\mu|^4]=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^4]+\underbrace{\frac{\binom{4}{2}}{n^4}\sum_{i<j}E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2]}_{=\boxed{\frac{6}{n^4}\frac{n(n-1)}{2}\sigma^4=\frac{3(n-1)}{n^3}\sigma^4}}$$

$$=\frac{\nu_4}{n^3}+\frac{3(n-1)}{n^3}\sigma^4\leq\frac{K}{n^2}\quad(K:=\nu_4+3\sigma^4<\infty)$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\leq\frac{K}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ なので、Borel-Cantelli より

$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=0$. つまり $P\left(\limsup_{n\to\infty}|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon\right)=0$ //

※チェックせよ.

㊕ 実は X_i が i.i.d. なら 分散や4次モーメントの条件を外せる
(独立同一)

<u>Thm</u> ← 分散の仮定は不要！
X_i : i.i.d. , $E[X_i]=\mu$ (有限) とする. 平均さえあれば良い！

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$ //

(証明は Web 上の補足資料を参照)

• 分布の極限

(証明は Web 上の補足資料)

<u>Thm</u> (Levy の連続性定理) ㊕

X_n : r.v.
ϕ_n : X_n の特性関数 ($\phi_n(t)=E[e^{itX_n}]$)

(i) X : r.v.
ϕ : X の特性関数

$$X_n \rightsquigarrow X \iff \phi_n(t) \to \phi(t) \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R})$$
(各点収束)

(ii) ある $\phi(t)$ が存在して, $\phi_n(t) \to \phi(t)$ (${}^\forall t \in \mathbb{R}$) かつ
$\phi(t)$ が $t=0$ で連続なら, ϕ を特性関数として持つ
r.v. X が存在して.

$$X_n \rightsquigarrow X$$

が成り立つ //

※ 多変量でも同様に. $\phi(t) := E[e^{it^T X}]$ ($t \in \mathbb{R}^d$) として.
「$X_n \rightsquigarrow X \iff \phi_n(t) \to \phi(t) \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}^d)$」
が成り立つ

<u>Cor</u> (Cramer-Wold device)

$$X_n \rightsquigarrow X \iff t^T X_n \rightsquigarrow t^T X \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}^d)$$
d次元 r.v.

Thm (中心極限定理)　Central Limit Theorem (CLT)

X_n : i.i.d.

$E[X_n] = \mu$: 有限

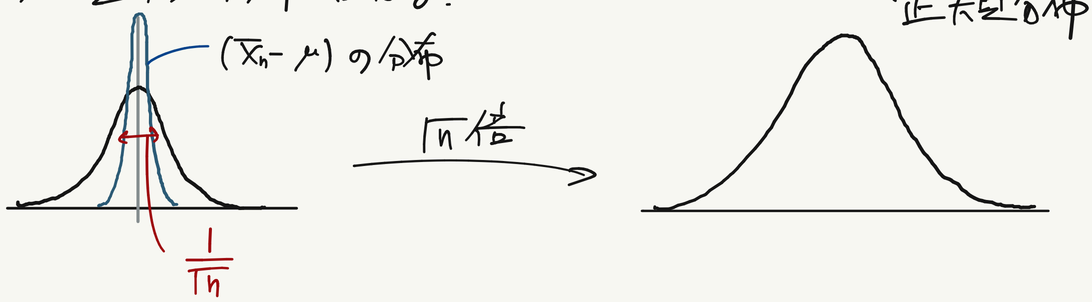
$Var[X_n] = \sigma^2 < \infty$, $\sigma^2 \neq 0$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とすると、

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$$

Note

$\bar{X}_n - \mu \to 0$ (a.s) であるが、$\sqrt{n}$倍膨らませることで、ちょうど正規分布になる。



(証明)　$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$の特性関数

$$\Phi_n(t) = E\left[e^{it\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}\right]$$

$$= E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} \frac{it}{\sqrt{n}}(X_j - \mu)}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \underbrace{E\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(X_j - \mu)}\right]}_{=\ \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$$

$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ とおく。 ← $X_j - \mu$の特性関数

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(0)\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

← 分散が存在すればϕは連続2回微分可能

$$= 1 + \underbrace{0}_{E[X_j - \mu] = 0} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

より、

$$\Phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

↓ $N(0, \sigma^2)$の特性関数

あとはLevyの連続性定理より、CLTが従う。

※ CLT は $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$ も与える.

Ex. (Bernoulli 試行の CLT)

$P(X_j=1)=\theta,\ P(X_j=0)=1-\theta \qquad (0<\theta<1)$

$E[X_j]=\theta,\ Var[X_j]=\theta(1-\theta)$ なので.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

//

ある選挙に2人の候補者 A, B がいる.

$X_i=1$ (有権者 i が A に投票), $X_i=0$ (i が B に投票) とする.

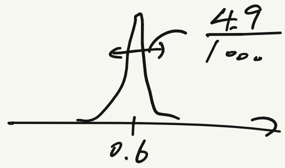
A を支持する人の割合 60%, B を支持する人の割合 40% とする.

X_i は $\theta=0.6$ の Bernoulli 分布に従う.

今 $n=1$万人 の開票後, $\bar{X}_n$ はおよそ

$$N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right) = N\left(0.6, \frac{0.4\times 0.6}{10^4}\right) = N(0.6, 24\times 10^{-6})$$

に従う.



$\frac{4.9}{1000} = 0.0049$

Thm (Poisson の小数の法則)

$Y_n \sim B(n, \theta_n) \qquad$ (n回のコイン投げ)

$n\theta_n \longrightarrow \lambda \qquad (n\to\infty)$ とする. このとき,

$Y_n \rightsquigarrow Po(\lambda)$

Proof Y_nの特性関数 $= \phi_n(t) = \left(\theta_n e^{it} + (1-\theta_n)\right)^n$

$$= \left(1-\theta_n(1-e^{it})\right)^n$$

$$= \left\{1-\frac{\lambda}{n}\left[(1-e^{it})+o(1)\right]\right\}^n$$

$$\longrightarrow \exp(-\lambda(1-e^{it}))$$: $Po(\lambda)$ の特性関数

//

例) 不良品が出る確率が低い製品を大量に生産すると. その中に入っている不良品の個数は大体ポアソン分布.

Lem (Slutskyの補題)

$X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \rightsquigarrow c$ (定数) のとき (X_n, Y_nは独立とは限らない)

(1) $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$

(2) $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$ //

(証明は略)

Thm (分散が未知の場合のCLT)

$$\hat{\sigma}_n^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \quad (\text{標本分散})$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

(信頼区間の計算に使える)

Proof 大数の法則より $\hat{\sigma}_n^2 \longrightarrow Var[X_1]$ (a.s.) なので

Slutskyの補題とCLTより従う //

— Delta法

Thm (Delta法)

$(X_n)_n$: i.i.d.

$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ を仮定

f: 1回微分可能かつ, $f'(\mu) \neq 0$ とおくと.

$$\frac{\sqrt{n}\left(f(\overline{X}_n) - f(\mu)\right)}{|f'(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$X_n = o_p(a_n) \iff \frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0$
スモールオーダー

(略証) $$f(\overline{X}_n) - f(\mu) = f(\mu) + (\overline{X}_n - \mu)f'(\mu) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f(\mu)$$

$$= (\overline{X}_n - \mu)f'(\mu) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

よって.

$$\frac{\sqrt{n}\left(f(\overline{X}_n) - f(\mu)\right)}{|f'(\mu)|\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \cdot \underbrace{\frac{f'(\mu)}{|f'(\mu)|}}_{=\pm 1} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\rightsquigarrow N(0,1) \quad (\text{by Slutsky})$$ //

Thm (多変量のCLT)

X_i : $\mathbb{R}^d$-値 r.v. (i.i.d.)

$E[X_i] = \mu \in \mathbb{R}^d$

$E[(X_i-\mu)(X_i-\mu)^T] = \Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$

($\Sigma \succ 0$ とする)

$\Longrightarrow \quad \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \Sigma)$

(多変量正規分布)

さらに、$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が微分可能で

$$\nabla f(\mu) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mu), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mu)\right]^T (\in \mathbb{R}^d) \neq 0$$

ならば、

$$\sqrt{n}(f(\overline{X}_n) - f(\mu)) \rightsquigarrow N(0, \nabla f(\mu)^T \Sigma \nabla f(\mu))$$

Ex.

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix}, \cdots, \underset{\substack{\| \\ X_n}}{\begin{pmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \end{pmatrix}} : \text{i.i.d.}$$

$$\mu = E[X_i] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = \mathrm{Cov}(X_i) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

CLTより、$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \Sigma)$ である。

$f(x,z) = xz$ とすると、$\nabla f(x,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$ より、

$$\nabla f(\mu)^T \Sigma \nabla f(\mu) = \mu_2^2 \sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2 \sigma_{22}$$

であるので、

$$\sqrt{n}(\overline{X}_{1,n}\overline{X}_{2,n} - \mu_1\mu_2) \rightsquigarrow N(0, \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22})$$

演習問題9

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \sup_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$

を示せ.

(ヒント: 前回演習の(4)を使う)

(2) $(X_n)_n$: i.i.d. で $E[X_n]=0$, $Var[X_n]=1$ とする.

$a_n \in \mathbb{R}\ (n \geq 1)$を用いて, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ とする.

(i) S_n が L^2-収束 $\iff \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$

を示せ. (L^2空間がBanach空間であることは用いて良い.)

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ なら, S_n が概収束することを示せ.

(ヒント: 補足資料のKolmogorovの定理を参照)

(3). $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とする. このとき, $X_n \xrightarrow{d} 0 \iff \mu_n \to 0,\ \sigma_n^2 \to 0$

を示せ. 正規分布

(4). $(X_n)_n$ は独立なr.v.の列で, $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とする. ← 正規分布

$\sum_n X_n$ が a.s. で収束 $\iff \sum_n \mu_n$ が収束し, $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$.

を示せ.

((3)のヒントにあるKolmogorovの定理は用いても良い.)

(5) $(X_n)_n$ は i.i.d. で分布関数 $F(x)$ を持つとする.

$x_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) < 1\}$

とする. $x_0 < \infty$ とする. このとき,

$\max(X_1, \ldots, X_n) \nearrow x_0 \quad (a.s.)$

を示せ.

(6) (クーポンコレクター問題)

n 個のアイテムがある. 今, n 個のアイテムから一様分布に従って1つのアイテムを取り出す. 取り出したアイテムはまた元に戻して, 同様の試行を繰り返す. こうして, n 個のアイテム全種類を取り出すのにかかった時間を T_n とおく.

(X_k が i.i.d. に $\{1,\dots,n\}$ 上の一様分布に従う時,
$T_n = \inf\{k \mid \{X_1,\dots,X_k\} = \{1,\dots,n\}\}$)

$$\frac{T_n}{n\log n} \xrightarrow{p} 1$$

を示せ. (ヒント: T_n の平均と分散を求めよ)

(7) 各 X_n は非負整数にのみ値を取る r.v. とする. このとき,

$$X_n \rightsquigarrow X \iff P(X_n = k) \to P(X = k) \quad (^\forall k: \text{非負整数})$$

を示せ. (X はある r.v.)

(8) $(A_n)_n$ は事象の列とする. ある $A \in \mathcal{F}$ に対し, 以下を示せ.

$$\mathbb{1}_{A_n} \rightsquigarrow \mathbb{1}_A \iff P(A_n) \to P(A)$$

(9) X, Y は独立で, 平均 0, 分散 1 の同一な分布に従っているとする.

今 $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ と X と Y は全て同じ分布であることがわかっている.

このとき, X と Y はともに分布が $N(0,1)$ であることを示せ.

(10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!}\int_0^n e^{-x}x^{n-1}\,dx$$ を求めよ.

(ヒント: 中心極限定理を指数分布に適用)